Ein neuer Pfad zu den wesentlichen Ergebnissen der SRT

Auf einem neuen und sehr schnellen Pfad werden auf den ersten 6 Seiten die wesentlichen Ergebnisse der SRT exakt hergeleitet. Die Darstellung kommt ohne Lorentz-Transformationen, ohne experimentelle Bestätigungen, ohne Anwendungsbeispiele, ohne Raumzeit-Diagramme und ohne Aufgaben daher, dafür präsentiert sie noch die 'halbe Geschwindigkeit'. Für Illustrationen und Beispiele (also das Fleisch am Knochen) wird oft auf die Webseite "www.relativity.li" verwiesen, wo mein Buch "Epstein erklärt Einstein" (kurz EEE) vollständig publiziert ist.

Im Abschnitt 20, sozusagen post festum, werden dann doch noch die Lorentz-Transformationen hergeleitet, damit die selten verwendeten allgemeinen Formeln der Addition von Geschwindigkeiten, der Aberration und des Dopplereffekts bestimmt werden können. Den Abschluss bildet ein Abschnitt zur Frage, was von Newtons Gesetzen übrigbleibt, sowie ein kurzer Abschnitt zu axiomatischen Fragen.

Was hier noch fehlt ist wie so oft der wichtige Teil zu den Transformationen der elektrischen und magnetischen Felder. Diese Lücke ist jetzt aber mit der folgenden Publikation geschlossen:
https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/SRT mit Vierervektoren.pdf

Version 1.4 vom 18. März 2021
(Version 1.0 publiziert Ende Dezember 2020)

Martin Gubler alias David Eckstein
gub@stafag.ch

1. Zeitdilatation und Dopplereffekt

In der Akustik muss man für die Berechnung der Frequenzänderung zwei Fälle unterscheiden:

a) der Sender ruht im Medium, der Empfänger entfernt sich mit der Geschwindigkeit v von der Quelle. Die entsprechende Formel ist dann

$$f_E = f_s \cdot \frac{c - v}{c} \tag{1.1}$$

b) der Empfänger ruht im Medium, der Sender entfernt sich mit der Geschwindigkeit v vom Empfänger. Die Frequenzänderung folgt dann der Formel

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c + v} \tag{1.2}$$

Wir setzen nun für das Licht zusätzlich voraus, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c des Signals in allen Inertialsystemen dieselbe sei **und** dass diese unabhängig sei vom Bewegungszustand des Senders, ganz so wie es die Wellengleichung von Maxwell fordert. Für Licht soll es also, im Unterschied zum Schall, kein ausgezeichnetes Bezugssystem geben, in welchem das Trägermedium des Signals ruht.

Wenn es kein ausgezeichnetes Bezugssystem mehr gibt und nur noch eine Relativgeschwindigkeit gemessen werden kann, müssen die beiden Fälle aber dasselbe Ergebnis liefern! Es muss also irgendetwas mit den Frequenzen geschehen wenn Sender und Empfänger bewegt sind gegeneinander. Wenn sich Frequenzen ändern sollen muss aber zwingend etwas mit der *Zeit* geschehen, das ist die *einzige Grösse*, welche bei konstanter Signalgeschwindigkeit die Anzahl der gezählten Schwingungen beeinflussen kann! Wir nehmen also an, dass es einen von der Relativgeschwindigkeit v abhängigen Faktor $r(v)$ gibt sodass gilt

$$\Delta t_v = \Delta t_0 \cdot r(v)$$

Δt_v ist dabei ein Zeitintervall (der zeitliche Abstand zweier Ereignisse) im 'schnellen' System, Δt_0 das entsprechende Zeitintervall im Ruhesystem gemessen. $r(v)$ kann nicht 1 sein für $v \neq 0$, da sich die beiden Formeln weiter oben unterscheiden. Die Zeit kann also nicht mehr gleich schnell laufen in zwei zueinander bewegten Bezugssystemen, wir müssen uns von Newtons Absoluter Zeit verabschieden!

Über die Funktion $r(v)$ machen wir keine weiteren Voraussetzungen. Nur zugunsten der einfacheren Sprechweise nehmen wir mal an, dass $r(v)$ kleiner sei als 1 für $v \neq 0$ (man kann den ganzen Text auch für den anderen Fall formulieren und kommt zu demselben Ergebnis).

Im Fall a) bewegt sich der Empfänger, dann tickt also seine Uhr um den Faktor $r(v)$ *langsamer*. Er wird entsprechend eine *grössere* Frequenz messen, in seinen langen Sekunden treffen mehr Schwingungen ein. (1.1) muss somit korrigiert werden zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c - v}{c} \cdot \frac{1}{r(v)}$$

Im Fall b) ruht der Empfänger, und die Uhr des schnellen Senders tickt *verlangsamt*. Dadurch *sinkt* aus der Sicht des Empfängers seine Sendefrequenz, und wir müssen (1.2) korrigieren zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c + v} \cdot r(v)$$

Wenn sich die beiden Fälle nicht mehr unterscheiden dürfen ergibt sich daraus die Gleichung

$$\frac{c - v}{c} \cdot \frac{1}{r(v)} = \frac{c}{c + v} \cdot r(v)$$

oder

$$r(v)^2 = \frac{(c-v)}{c} \cdot \frac{(c+v)}{c} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

und damit

$$\boldsymbol{r(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.3)$$

Das liefert den bekannten Faktor für die *Zeitdilatation*. Die negative Lösung wäre allenfalls interessant für eine Science-Fiction-Geschichte ...

Damit finden wir nun sofort die korrekte Formel für den *longitudinalen Dopplereffekt*. Setzen wir den Wurzelausdruck für $r(v)$ in die korrigierten Dopplerformeln ein erhalten wir in beiden Fällen dasselbe Ergebnis:

$$\boldsymbol{f_E} = f_S \cdot \frac{c}{c+v} \cdot r(v) = f_S \cdot \frac{c}{c+v} \cdot \sqrt{\frac{(c-v)\cdot(c+v)}{c^2}} = \boldsymbol{f_S \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}} \qquad (1.4)$$

$$\boldsymbol{f_E} = f_S \cdot \frac{c-v}{c} \cdot \frac{1}{r(v)} = f_S \cdot \frac{c-v}{c} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{(c-v)\cdot(c+v)}} = \boldsymbol{f_S \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}} \qquad (1.5)$$

Dabei steht v für die Geschwindigkeit, mit der sich die beiden voneinander *entfernen*.

Das Relativitätsprinzip, also die Forderung, dass es kein ausgezeichnetes "Äthersystem" geben soll, liefert zusammen mit der zusätzlichen Annahme, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals unabhängig sein soll vom Bewegungszustand des Senders, sofort die Formeln für die Zeitdilatation und den longitudinalen Dopplereffekt.

Graphen zu den drei Doppler-Formeln und eine schöne Anwendung des optischen Dopplereffekts findet man hier:
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/d0_de/d6_de
Beachten Sie, dass dort die Relativgeschwindigkeit v positiv eingesetzt wird bei *Annäherung*. Die Vorzeichen sind daher gerade anders herum gesetzt.

Die Zeitdilatation hat einen weiteren unmittelbaren Effekt. Bewegt sich ein Sender *senkrecht* zur direkten Sichtlinie zum Empfänger so ändert sich die Distanz der beiden ja nicht. Trotzdem gibt es einen Doppler-Effekt, da der Oszillator im Sender aus der Sicht des Empfängers verlangsamt schwingt. Man nennt diesen rein relativistischen Effekt den *transversalen Dopplereffekt* im Unterschied zum *longitudinalen Dopplereffekt*, den wir oben behandelt haben. Für die Frequenzverminderung gilt hier

$$\boldsymbol{f_E = f_S \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.6)$$

Der Effekt ist viel schwieriger nachzuweisen als der longitudinale Dopplereffekt, da er vom Quadrat von v/c abhängt und nicht von v/c selber.

Formeln für den allgemeinen Fall werden im Abschnitt 23 hergeleitet.

2. Die Addition von parallelen Geschwindigkeiten

Aus der relativistischen Dopplerformel gewinnen wir jetzt die Formel für die Addition von parallelen Geschwindigkeiten. Ganz ähnlich findet man das schon bei Hermann Bondi ("Relativity and Common Sense", 1962, neu aufgelegt bei Dover Publications 1980) und im schönen Buch "It's About Time" von N. David Mermin (Princeton University Press, 2005).

Es bewege sich B in positiver x_A-Richtung von A mit der Geschwindigkeit v relativ zu A, und es bewege sich C in positiver x_B-Richtung von B mit der Geschwindigkeit u relativ zu B. Die beiden x-Richtungen sollen wie üblich zusammenfallen.
C sende nun Strahlung der Frequenz f_C in Richtung von B und damit auch von A. Nach dem letzten Abschnitt empfängt B diese Strahlung bei einer Frequenz von

$$f_B = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Mit dieser Frequenz rauscht die Strahlung an B vorbei und weiter zu A, der entsprechend die Frequenz misst

$$f_A = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot f_B = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit z von C relativ zu A gilt andererseits

$$f_A = \sqrt{\frac{c-z}{c+z}} \cdot f_C$$

Setzt man die beiden Terme für f_A einander gleich so erhält man nach einigen elementaren Umformungen

$$\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{c}^2}} \qquad (2.1)$$

Sind v und u klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c , so unterscheidet sich das Ergebnis praktisch nicht von der Geschwindigkeitsaddition nach Newton und Galilei.
Setzt man für eine oder auch für beide der Geschwindigkeiten u und v die Lichtgeschwindigkeit c ein, so liefert die Formel wieder diese Lichtgeschwindigkeit c . Die Rechnung zeigt somit auch, dass die getroffenen Annahmen nicht schon in sich widersprüchlich sind.

3. Die 'halbe Geschwindigkeit' und die 'doppelte Geschwindigkeit' in der SRT

Wir fragen uns jetzt, für welche Geschwindigkeit w gilt

$$v = \frac{w + w}{1 + \frac{w \cdot w}{c^2}}$$

Nach (2.1) wäre w dann die 'halbe Geschwindigkeit' von v in der SRT, und v wäre die 'doppelte Geschwindigkeit' von w . Löst man die Gleichung nach w auf so erhält man nach elementaren Umformungen

$$\boldsymbol{w = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (3.1)$$

Für kleine Geschwindigkeiten v ist der Wurzelterm praktisch 1 und wir erhalten für w praktisch $v / 2$, also das klassische Ergebnis. Da der Wurzelterm immer kleiner ist als 1 ist w also immer ein bisschen grösser als $v / 2$. Erreicht v fast die Lichtgeschwindigkeit so ist w fast gleich gross wie v !

Jerzy Kocik hat im American Journal of Physics (Vol. 80, Nr. 8, p. 737f) gezeigt, wie man Geschwindigkeiten in der SRT ganz einfach mit Zirkel und Lineal addieren kann. Sein Artikel hat meinen Freund Alfred Hepp und mich zu einer Ausarbeitung angeregt, in welcher die 'halbe Geschwindigkeit' eine wichtige Rolle einnimmt. Sie können diese Arbeit hier herunterladen: https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/Relativ_06_de.pdf

Zu zwei mit v relativ zueinander bewegten Bezugssystemen S und S' gibt es immer ein 'mittleres' Bezugssystem T in welchem sich die Situation vollkommen symmetrisch darstellt. S bewegt sich für T mit $-w$ in die eine Richtung, und S' bewegt sich für T mit w in die Gegenrichtung. Dabei ist w die 'halbe Geschwindigkeit' von v .

Die Kenntnis dieser 'halben Geschwindigkeit' ist oft nützlich. Wir werden sie im nächsten Abschnitt einsetzen um den relativistischen Ausdruck für den Impuls herzuleiten. Ohne diese halbe Geschwindigkeit wären die erforderlichen algebraischen Umformungen mühsamer. Und im Abschnitt 8 zeigen wir noch, dass man die kinetische Energie erhält wenn man den Impuls mit der 'halben Geschwindigkeit' multipliziert.

Mir sind keine Autoren bekannt welche mit dieser 'halben Geschwindigkeit' gearbeitet haben.

4. Der vollkommen inelastische Stoss

In einem System S sollen sich zwei identische Körper vollkommen symmetrisch aufeinander zu bewegen. Wir lassen die Möglichkeit zu (aber wir verlangen es nicht !), dass ihre Massen von der Geschwindigkeit abhängen, und schreiben für die beiden Impulse daher

$$m_w \cdot w \qquad \text{respektive} \qquad m_w \cdot (-w)$$

Der gesamte Impuls ist null, daher haben wir nach einem vollkommen inelastischen Stoss eine einzige Masse M_0 , die im System S ruht.
Nun betrachten wir diese Kollision aus einem System S' , welches sich mit $-w$ relativ zu S bewegt. In diesem System ist der zweite Körper in Ruhe, während sich der erste mit der 'doppelten Geschwindigkeit' v bewegt. Nach der Kollision bewegt sich der entstandene Körper im System von S' mit der Geschwindigkeit w . Wir schreiben nun die Gleichungen für die Impulserhaltung und die Massenerhaltung im System S' auf. Das sind ja, nebst dem Erhaltungssatz für die elektrische Ladung, die **grundlegenden Glaubenssätze** der ganzen Physik:

$$\text{I} \qquad m_v \cdot v \;=\; M_w \cdot w$$

$$\text{II} \qquad m_v + m_0 \;=\; M_w$$

Wir eliminieren in der ersten Gleichung mithilfe der zweiten M_w und setzen für die 'halbe Geschwindigkeit' w das Ergebnis des letzten Abschnittes ein:

$$m_v \cdot v \;=\; (\, m_v + m_0 \,) \cdot w \;=\; (\, m_v + m_0 \,) \cdot \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nach der Division durch v erhält man schnell

$$\boldsymbol{m_v \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.1}$$

Das ist die Definition der 'dynamischen Masse' m_v . Der relativistische Impuls ist entsprechend definiert durch

$$\boldsymbol{p \;=\; m_v \cdot v \;=\; \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.2}$$

Nur mit *diesen* Definitionen lassen sich die Gleichungen I und II erfüllen! Der Erhaltungssatz für die Massen gilt also nur für die 'dynamischen Massen', und auch die Definition des Impulses erfährt eine Korrektur.

Aus $w = v/2$ würde aus den beiden Gleichungen $m_v = m_0$ und $M_w = M_0 \;=\; 2 \cdot m_0$ folgen. Die 'kleine' Korrektur der Additionsformel für Geschwindigkeiten hat also sofort tiefgreifende Konsequenzen.

Diese Herleitung hat Max Born in seinem Buch "Die Relativitätstheorie Einsteins" (erste Auflage 1920) vorgestellt, allerdings in viel komplizierterer Form (p. 233ff). Mit unserer 'halben Geschwindigkeit' verschwindet der ganze algebraische Aufwand.
Born präsentiert in jenem Buch auch schon eine Herleitung der relativistischen Impulsformel, welche auf die Erhaltungssätze für die Masse und den Impuls verzichten kann (unser Abschnitt 18).

5. Gesamtenergie, Kinetische Energie und Ruheenergie

Wir bestimmen nun wie üblich den relativistischen Ausdruck für die kinetische Energie, d.h. wir berechnen den Aufwand um einen Körper aus dem Ruhezustand auf eine bestimmte Geschwindigkeit v_{end} zu beschleunigen. Aus

$$dE = F \cdot ds \qquad \text{und} \qquad F = \frac{dp}{dt} \qquad (\text{ Newtons 'lex secunda' })$$

erhält man

$$dE = \frac{dp}{dt} \cdot ds = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = \frac{dp}{dv} \cdot v \cdot dv$$

und somit

$$E_{kin} = \int_0^{v_{end}} \frac{dp}{dv} \cdot v \cdot dv$$

Die Formel (4.2) im letzten Abschnitt liefert

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dv} = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}} \tag{5.1}$$

und das Integral ergibt dann zusammen mit (4.1)

$$\boldsymbol{E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_{end}}^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_{v_{end}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2} \tag{5.2}$$

Zu einer verrichteten Arbeit oder einer Energiezufuhr gehört also eine Massenzunahme nach der Formel

$$\boldsymbol{\Delta W = \Delta E = \Delta m \cdot c^2} \tag{5.3}$$

Energie und Masse sind ineinander umwandelbar. Der Ruhemasse m_0 entspricht schon eine Ruheenergie E_0 vom Betrag $m_0 \cdot c^2$, und es gilt

$$\boldsymbol{E_{tot} = E_0 + E_{kin} = m_v \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2} \tag{5.4}$$

Der Energieerhaltungssatz und der Massenerhaltungssatz verschmelzen zu einem einzigen Erhaltungssatz, der wahlweise als Energieerhaltungssatz (unter Einschluss der Ruheenergien) oder als Massenerhaltungssatz (für die 'dynamischen Massen') formuliert werden kann.

Beispiele für Prozesse, bei denen Masse in Energie umgewandelt wird oder auch umgekehrt gibt es viele.
Zugehörige Abschnitte in EEE :
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/f0_de/f3_de
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/f0_de/f4_de
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/f0_de/f5_de

6. Gesamtenergie, Impuls und der Satz des Pythagoras

Berechnet man die Differenz der quadrierten Gesamtenergie und der quadrierten Ruheenergie, so erhält man ein erstaunliches Resultat:

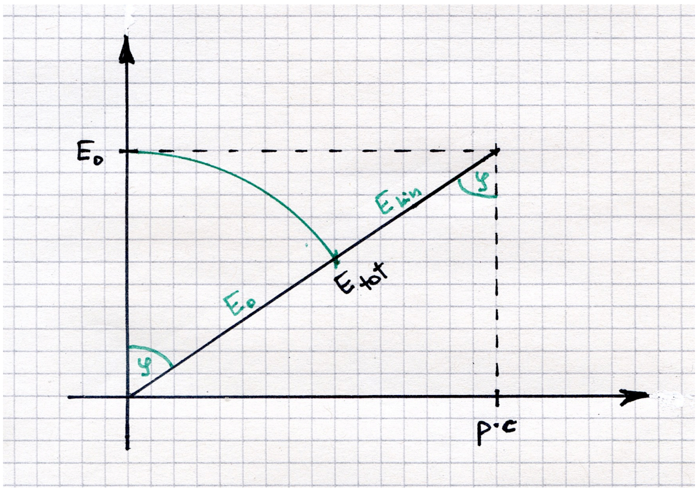
$$E_{tot}{}^2 - E_0{}^2 = \frac{m_0{}^2 \cdot c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0{}^2 \cdot c^4 = m_0{}^2 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) =$$

$$= m_0{}^2 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = m_0{}^2 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0{}^2 \cdot v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot c^2 = p^2 \cdot c^2$$

Es gilt also

$$\boldsymbol{E_0{}^2 + p^2 \cdot c^2 = E_{tot}{}^2} \qquad (6.1)$$

Die Ruheenergie, der mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Impuls und die Gesamtenergie bilden also die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Energie und Impuls sind ähnlich verknüpft wie Zeit und Raum (in der Darstellung mit Epstein-Diagrammen ist das selbstverständlich, siehe https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/e0_de/e5_de).



Für den Winkel φ in diesem Dreieck gilt

$$sin(\varphi) = \frac{p \cdot c}{E_{tot}} = \frac{m_v \cdot v \cdot c}{m_v \cdot c^2} = \frac{v}{c} \equiv \beta_v \qquad (6.2)$$

und

$$cos(\varphi) = \frac{E_0}{E_{tot}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \equiv \frac{1}{\gamma_v} \qquad (6.3)$$

Damit sind auch die traditionellen Variablen β und γ definiert.

7. Gesamtenergie, Impuls und die ganze Geschwindigkeit

Eine weitere nützliche Beziehung finden wir, wenn wir die Formel (5.4) für die Gesamtenergie durch die Formel (4.2) für den Impuls dividieren oder einfach feststellen, dass gilt

$$\frac{E_{tot}}{c^2} = m_v = \frac{p}{v}$$

Es gilt offenbar

$$\boldsymbol{p \cdot c^2 = E_{tot} \cdot v} \qquad (7.1)$$

Auch anhand der Figur im Abschnitt 6 lässt sich herauslesen dass gilt

$$\frac{p \cdot c}{E_{tot}} = \sin\varphi = \frac{v}{c}$$

Mit (7.1) lässt sich zum Beispiel die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems einiger Teilchen berechnen.

8. Kinetische Energie, Impuls und die halbe Geschwindigkeit

Wir gehen von der Beziehung (6.1) zwischen Gesamtenergie, Ruheenergie und Impuls aus :

$$m_v{}^2 \cdot c^4 = m_0{}^2 \cdot c^4 + m_v{}^2 \cdot v^2 \cdot c^2$$

Wir dividieren durch c^2 und stellen ein bisschen um:

$$(m_v{}^2 - m_0{}^2) \cdot c^2 = m_v{}^2 \cdot v^2$$

Nach der Division durch $(m_v + m_0)$ erhalten wir links nach (5.4) den Ausdruck für die kinetische Energie:

$$(m_v - m_0) \cdot c^2 = \frac{m_v{}^2}{m_v + m_0} \cdot v^2 = \frac{m_v}{1 + \frac{m_0}{m_v}} \cdot v^2 = \frac{m_v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v^2 = m_v \cdot v \cdot \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_v \cdot v \cdot w$$

wo w für die 'halbe Geschwindigkeit' von v steht (siehe Abschnitt 3). Wir erhalten damit ein Ergebnis, welches gleichermassen in der 'klassischen' Physik gilt wie auch in der SRT:

$$\boldsymbol{E_{kin} = m_v \cdot v \cdot w = p \cdot w} \qquad (8.1)$$

In der klassischen Physik haben wir ja ebenfalls

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot v \cdot \frac{v}{2} = p \cdot w$$

Es ist nicht offensichtlich, dass sich die relativistische Formel für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten dem klassischen Ausdruck annähert. Sowohl beim Impuls als auch bei der halben Geschwindigkeit ist das aber klar, somit muss es auch für deren Produkt gelten. Mir ist kein Buch bekannt in welchem (8.1) vorgestellt wird.

9. Impuls und Energie von Lichtteilchen

Um ein Teilchen mit einer nicht verschwindenden Ruhemasse auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, braucht es nach (5.2) unendlich viel Energie. Lichtteilchen oder Photonen können daher keine Ruhemasse haben, sie sind ja obligatorisch mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs. Sie haben aber Energie und Impuls, und für $m_0 = 0$ erhalten wir aus der Gleichung (6.1)

$$0 + p^2 \cdot c^2 = {E_{tot}}^2$$

oder

$$\boldsymbol{E = E_{tot} = E_{kin} = p \cdot c} \qquad (9.1)$$

Diese Formel erhalten wir auch wenn wir in (7.1) für v die Lichtgeschwindigkeit c einsetzen oder wenn wir in (8.1) für die 'halbe Geschwindigkeit' von c ebenfalls c einsetzen.

Nehmen wir Planck's Formel $E = h \cdot f$ hinzu erhalten wir die wichtigen Beziehungen

$$\boldsymbol{E = h \cdot f = p \cdot c} \qquad (9.2)$$

und

$$\boldsymbol{p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}} \qquad (9.3)$$

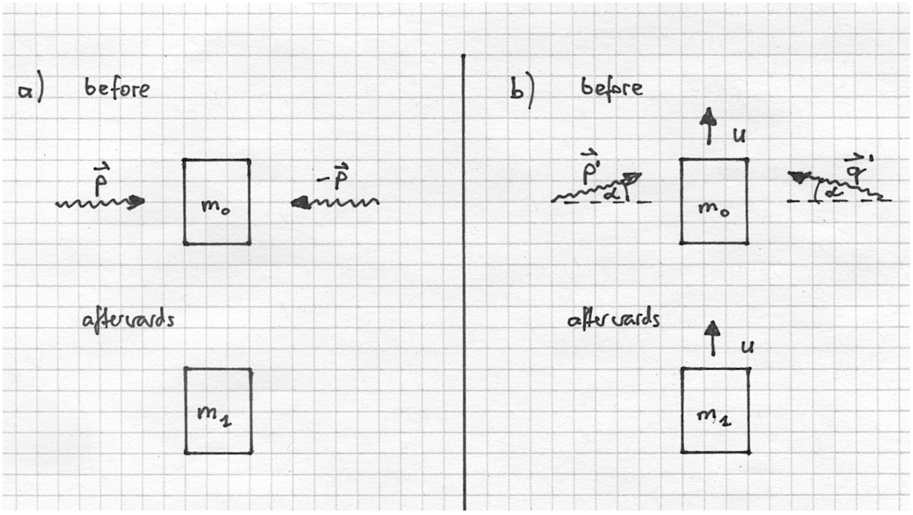
Strahlung einer bestimmten Frequenz f besteht also aus Teilchen der Energie $h \cdot f$, und jedem dieser Teilchen kommt der Impuls $p = h \cdot f \,/\, c$ zu. Auf dieser Grundlage konnte Einstein 1905 alle Phänomene des äusseren Photoeffekts erklären, was ihm später den Nobelpreis einbrachte.

Dass Licht einen Strahlungsdruck ausübt hat Poynting schon 1884 aus den Gleichungen von Maxwell abgeleitet. Eine schöne Illustration davon ist der Schweif von Kometen: Dieser zeigt immer von der Sonne weg, weil der Druck der Sonnenstrahlung die freigesetzten Ionen und Staubteilchen von der Sonne weg beschleunigt. Wenn sich der Komet wieder von der Sonne entfernt fliegt er also mit dem Schweif voran ! Auf dem folgenden Bild des Kometen Hale-Bopp sieht man schön die beiden Schweife: Den Ionenschweif und den Schweif der schwereren Staubteilchen, die sich weniger leicht beschleunigen lassen:

http://astronomy.swin.edu.au/sao/imagegallery/Hale-Bopp.jpg

10. $E = m \cdot c^2$ aus dem Impulserhaltungssatz und $E = p \cdot c$

Figur a) zeigt einen Körper der Ruhemasse m_0 auf den sich zwei Energiequanten symmetrisch zubewegen. Jeder Quant transportiert den Impuls p und die Energie $E = p \cdot c$. Nach der Absorption bleibt der Körper aus Symmetriegründen in Ruhe, seine Energie hat um $\Delta E = 2 \cdot E$ zugenommen. Seine Masse sei nachher m_1 :



Figur b) zeigt denselben Vorgang in einem Bezugsystem, welches sich gegenüber dem Ruhesystem des Körpers mit der beliebig kleinen Geschwindigkeit u nach unten bewegt. Der Körper hat vor und nach der Absorption die Geschwindigkeit u , und die beiden Quanten, die sich auch in diesem Bezugssystem mit c bewegen müssen, fallen jetzt unter einem Winkel α ein für welchen gilt $sin(\propto) = u/c$. Die Impulse p' und q' mögen dabei einen leicht anderen Betrag haben als p .

Die Impulserhaltung für die Komponenten in der Richtung von u bedeutet jetzt

$$\gamma_u \cdot m_1 \cdot u = \gamma_u \cdot m_0 \cdot u + 2 \cdot p' \cdot sin(\propto) = \gamma_u \cdot m_0 \cdot u + 2 \cdot p' \cdot \frac{u}{c}$$

Nach der Division durch u (oder durch $\gamma_u \cdot u$) haben wir

$$m_1 = m_0 + 2 \cdot \frac{p'}{c} \cdot \frac{1}{\gamma_u}$$

Das gilt für alle (noch so kleinen) Geschwindigkeiten u . Damit gilt die Gleichung auch im Grenzfall für $u \to 0$. Der Limes von p' für u gegen null ist aber p (und derjenige für γ_u ist 1), und wir erhalten damit auf jeden Fall

$$m_1 - m_0 = 2 \cdot \frac{p}{c} = 2 \cdot \frac{E}{c^2} = \frac{\Delta E}{c^2}$$

oder

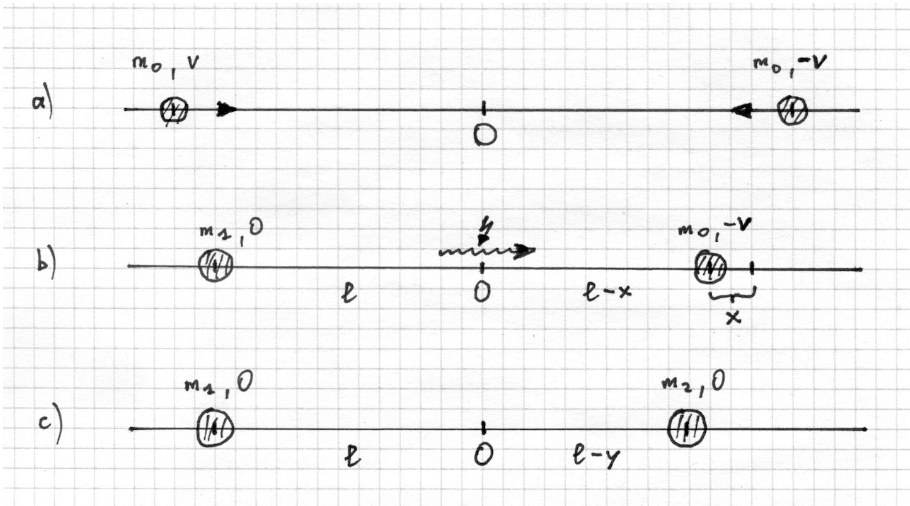
$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad (10.1)$$

Für sehr kleine Geschwindigkeiten kann man die rot gedruckten Textteile in sehr guter Näherung auch weglassen.

Diese sehr schöne Herleitung hat Albert Einstein 1946 gefunden. Sie ist der 14. Beitrag in der Essaysammlung "Aus meinen späten Jahren" (Ullstein tb 34721, 1993[4]).

11. $E = m \cdot c^2$ aus dem Impulserhaltungssatz und $E = p \cdot c$

Figur a) zeigt zwei Teilchen derselben Ruhemasse m_0 die sich mit den Geschwindigkeiten v und $-v$ aufeinander zu bewegen. Der Gesamtimpuls ist null, der Schwerpunkt O dieses Systems befindet sich in Ruhe. Er liegt in der Mitte zwischen den beiden Teilchen :



Figur b) zeigt den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $\Delta t \;=\; l/c$ nachdem das linke Teilchen seinen Impuls in der Form eines ultrakurzen Lichtblitzes abgegeben hat. Der Lichtblitz befindet sich bei O, das linke Teilchen ruht jetzt im Abstand l von O und hat die Masse m_1. Das rechte Teilchen befindet sich in jenem Moment im Abstand

$$l - x \;=\; l - \Delta t \cdot v \;=\; l - \frac{l}{c} \cdot v \;=\; l \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

vom Schwerpunkt O des Gesamtsystems. Die Gleichung für den Schwerpunkt lautet somit

$$l \cdot m_1 \;=\; \gamma \cdot m_0 \cdot (l - x) \;=\; \gamma \cdot m_0 \cdot l \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Die dynamische Masse des Blitzes geht nicht in die Rechnung ein, weil sie sich ja gerade am Ort O befindet !
Wir dividieren durch l und benützen die Gleichung $E = p \cdot c = \gamma \cdot m_0 \cdot v \cdot c$ und erhalten

$$m_1 \;=\; \gamma \cdot m_0 \;-\; \gamma \cdot m_0 \cdot \frac{v}{c} \;=\; \gamma \cdot m_0 \;-\; \frac{p}{c} \;=\; \gamma \cdot m_0 \;-\; \frac{E}{c^2}$$

Die Abgabe der Energie E führt zu einer Verminderung der dynamischen Masse um den Betrag $\frac{E}{c^2}$!! (11.1)

In der zeitlichen Umkehr bedeutet das, dass die Zufuhr der Energie E zu einer entsprechenden Zunahme der dynamischen Masse führt! Die Figur c) zeigt den Zustand, nachdem der rechte Körper den Blitz (und damit dessen Impuls und Energie) absorbiert hat. Er ruht, und nach dem eben Gesagten gilt

$$m_2 \;=\; \gamma \cdot m_0 \;+\; \frac{E}{c^2}$$

Damit erhalten wir

$$\boldsymbol{m_2 - m_1} \;=\; \left(\gamma \cdot m_0 \;+ \frac{E}{c^2}\right) - \left(\gamma \cdot m_0 \;- \frac{E}{c^2}\right) \;=\; 2 \cdot \frac{E}{c^2} \;=\; \frac{\boldsymbol{\Delta E}}{\boldsymbol{c^2}} \tag{11.2}$$

Zu Beginn hatten die beiden Körper dieselbe Ruhemasse (und dieselbe dynamische Masse). Nach der Impuls- und Energieübertragung haben die Ruhemassen der beiden Körper (welche in unserer Anordnung mit den dynamischen Massen identisch sind) eine Differenz von $\Delta E / c^2$.

Energie und dynamische Masse können ineinander umgerechnet werden, und der entsprechende Faktor ist das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\Delta E = \Delta m \cdot c^2} \tag{11.3}$$

Dividiert man den Erhaltungssatz für die Energie durch c^2 so erhält man den Erhaltungssatz für die dynamischen Massen. Ein Erhaltungssatz für die Ruhemassen gilt nicht, es ist ja

$$m_1 + m_2 = \left(\gamma \cdot m_0 - \frac{E}{c^2}\right) + \left(\gamma \cdot m_0 + \frac{E}{c^2}\right) = 2 \cdot \gamma \cdot m_0 > 2 \cdot m_0$$

Die kinetische Energie der beiden Teilchen ist bei diesem Prozess in zwei Schritten in Ruheenergie umgewandelt worden. Die Gesamtenergie bleibt dabei natürlich erhalten.

Die Idee, die Stabilität des Schwerpunkts bei einem Austausch von Energie innerhalb eines abgeschlossenen Systems auszuwerten, stammt ursprünglich auch von Einstein. Er hat dabei einen Kasten verwendet, der die Teilchen nach dem Energie- und Impulsaustausch wieder zur Ruhe zwingt. Das erfordert eine zusätzliche Diskussion, da es in der SRT ja keine starren Körper geben kann.
Francesco Cester hat den Kasten endlich weggelassen ("Newton und die Relativität", Books on Demand 2017). Er arbeitet dann mit Näherungen für sehr kleine Geschwindigkeiten, was natürlich berechtigt ist, wenn man an den Austausch einiger Photonen denkt. Dabei verschwindet aber auch die wichtige Unterscheidung von Ruhemassen und dynamischen Massen.
Unsere Darstellung ist also eine Weiterentwicklung von Cesters Ansatz. Sie zeigt nebenbei, dass der Erhaltungssatz für die dynamischen Massen aus dem Erhaltungssatz für den Impuls folgt.

12. $E = m \cdot c^2$ aus dem Impulserhaltungssatz und $E = h \cdot f$

Ein im System S ruhender Körper der Masse m_0 soll gleichzeitig in entgegengesetzte Richtungen je einen Energiequant vom Betrag $h \cdot f$ aussenden. Nach dieser Emission mag er die Ruhemasse m_1 haben. Der Körper verharrt dabei in S in Ruhe, da sich die Impulse der beiden Quanten aufheben.

Diesen Vorgang betrachten wir nun aus einem Bezugssystem S' , welches sich auf der Achse der beiden Lichtquanten mit der Geschwindigkeit v relativ zu diesem Körper bewegt. Der Körper hat in S' vor und nach der Emission der Quanten die Geschwindigkeit v . Wir schreiben nun mit (9.3) den Impulserhaltungssatz für diesen Emissionsprozess im System S' auf. Dabei müssen wir die Frequenzverschiebungen nach (1.4) berücksichtigen:

$$\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_1 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{h \cdot f}{c} \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \frac{h \cdot f}{c} \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Etwas umgestellt:

$$(m_0 - m_1) \cdot v = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \right) =$$

$$= \frac{h \cdot f}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v}{c}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} - \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} \right) =$$

$$= \frac{h \cdot f}{c} \cdot \left(\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right) = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{2v}{c}$$

Somit, nach Division durch v

$$\boldsymbol{\Delta m = 2 \cdot h \cdot f / c^2 = \Delta E / c^2} \qquad (12.1)$$

Die Ruhemasse des Körpers nimmt durch die Abstrahlung der Energie ΔE um den Betrag $\Delta E / c^2$ ab.

Zu dieser Rechnung bin ich ebenfalls durch die Lektüre des Buches "Newton und die Relativität" von Francesco Cester (Books on Demand, 2017) angeregt worden.

Cester selber verweist auf einen Artikel von Fritz Rohrlich im American Journal of Physics (Nr. 58 vom April 1990). Rohrlich rechnet dort näherungsweise mit der akustischen Dopplerformel (1.1) für eine bewegte Lichtquelle. Das ist nicht falsch, die Relativgeschwindigkeit v darf ja beliebig klein sein. Rohrlich zieht aber wegen der Verwendung von (1.1) statt (1.4) noch den falschen Schluss, dass die abgestrahlte Energiemenge in beiden Bezugssystemen denselben Betrag habe. Die exakte Rechnung zeigt hingegen dass gilt $\Delta E' = \Delta E \cdot \gamma$.
Genau dieses Resultat braucht Einstein in seiner ersten Herleitung der Formel $E = m \cdot c^2$. Wir stellen seine Argumentation im nächsten Abschnitt vor.

13. $E = m \cdot c^2$ aus dem Energieerhaltungssatz und $E = h \cdot f$

Einstein hat im Herbst 1905 quasi als Ergänzung zur Arbeit über die Relativitätstheorie einen Artikel nachgereicht mit dem Titel "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?". Er leitet dort erstmals die Formel $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ ab, und zwar aus dem Energieerhaltungssatz. Wir vereinfachen die Darstellung ein bisschen, indem wir die Richtung der Energieabstrahlung mit der Richtung der Relativbewegung zusammenfallen lassen. Dadurch können wir für die Frequenzänderung die Formel für den longitudinalen Dopplereffekt verwenden.

Die Situation ist identisch mit derjenigen im Abschnitt 12 : Ein im System S ruhender Körper der Masse m_0 soll gleichzeitig in entgegengesetzte Richtungen je eine Energiemenge $L/2$ bei der Frequenz f abstrahlen. Nach dieser Emission mag er die Ruhemasse m_1 haben. Der Körper verharrt dabei in S in Ruhe, da sich die Impulse der beiden abgestrahlten Energiepakete aufheben (oder aus Symmetriegründen ...).

Im Ruhesystem des Körpers schreibt sich die Energieerhaltung mit $E_0 = E_1 + L$

Diesen Vorgang betrachten wir nun aus einem Bezugssystem S' welches sich auf der Achse der beiden Strahlungsportionen mit der Geschwindigkeit v relativ zu diesem Körper bewegt. Der Körper hat in S' vor und nach der Emission der Quanten die Geschwindigkeit v , was entscheidend sein wird.

Im System S' müssen wir bei der Energiebetrachtung mit (9.2) auch den Dopplereffekt nach (1.4) berücksichtigen:

$$E_0{}' = E_1{}' + \frac{L}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{(c+v)}{(c-v)}} + \sqrt{\frac{(c-v)}{(c+v)}} \right) = E_1{}' + \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{(c+v) + (c-v)}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = E_1{}' + L \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Also gilt

$$(E_0{}' - E_1{}') - (E_0 - E_1) = (E_0{}' - E_0) - (E_1{}' - E_1) = L \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$(E_0{}' - E_0)$ ist aber als kinetische Energie $K_0{}'$ des Körpers im System S' *vor* der Emission zu interpretieren, $(E_1{}' - E_1)$ ist entsprechend die kinetische Energie $K_1{}'$ des Körpers im System S' *nach* der Emission. Für die Differenz dieser kinetischen Energien gilt also

$$K_0{}' - K_1{}' = L \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48} \cdot \frac{v^6}{c^6} + \dots + (-1) \right)$$

Die kinetische Energie hat also abgenommen, *obwohl die Relativgeschwindigkeit dieselbe geblieben ist* !! Die Abstrahlung der Energie L muss demnach mit einer *Massenabnahme* verbunden sein. Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung gilt für kleine Geschwindigkeiten v (und v darf bei unserer Betrachtung beliebig klein sein!)

$$\frac{1}{2} \cdot (m_0 - m_1) \cdot v^2 = L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{\Delta m = L / c^2}$$

Einstein schreibt: "Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L / c^2. Hierbei ist offenbar unwesentlich, dass die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so dass wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden: Die Masse eines Körpers ist ein Mass für dessen Energieinhalt."

14. Die Längenkontraktion

Die Inertialsysteme von "Rot" und "Schwarz" sollen sich mit v respektive $-v$ gegeneinander bewegen. Die Systeme seien wie immer so ausgerichtet, dass ihre x-Achsen aufeinander liegen und die y-Achsen und z-Achsen parallel sind.

Schwarz markiert nun zwei Punkte A und B auf seiner x-Achse und misst die Länge Δx dieser Strecke mit seinen Massstäben oder mithilfe einer Uhr in A und eines Spiegels in B. Schwarz stellt zudem fest, dass Rot die Zeit Δt braucht um diese Strecke zurückzulegen. Schwarz kennt dann die Relativgeschwindigkeit $v = \Delta x \,/\, \Delta t$.
Wie misst der vorbeifliegende Rot die Länge dieser Strecke ? Er muss zuerst genauso wie Schwarz die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme bestimmen, indem er ebenfalls misst, wie lange es dauert, bis der Punkt A an einer Strecke bekannter Länge auf *seiner* x'-Achse vorbeigeflogen ist. Schwarz und Rot sind sich (aus Symmetriegründen) über den Betrag der Relativgeschwindigkeit einig. Nun kann Rot die Länge der Strecke AB bestimmen indem er die Zeitdauer $\Delta t'$ misst, die zwischen der Begegnung mit A und derjenigen mit B verstreicht. Er rechnet sich dann aus $\Delta x' = v \cdot \Delta t'$.
Damit gilt

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Für die gemessenen Streckenlängen gilt daher mit dem Resultat (1.3) für die Zeitdilatation

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Rot misst eine *kleinere* Länge an der für ihn schnell vorbeifliegenden Strecke AB :

$$\boldsymbol{\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{14.1}$$

Schwarz misst die *Ruhelänge* oder *Eigenlänge* der Strecke AB, sie ist immer die Längste.

Die sogenannte *Längenkontraktion* ist somit eine zwingende Folge der Zeitdilatation. Schnelle Uhren laufen langsamer, und schnelle Strecken erscheinen kürzer. Mit Newtons Absoluter Zeit stirbt also auch sein Absoluter Raum !

Längenmessungen in y- oder z-Richtung sind von diesem Effekt nicht betroffen. Epstein argumentiert in seinem schönen Buch "Relativitätstheorie anschaulich dargestellt" folgendermassen: Gäbe es so etwas wie eine *Querkontraktion*, dann würden die beiden Schienen aus der Sicht des Zuges bei hohen Geschwindigkeiten zusammenrücken, die Spurweite würde zu eng. Aus der Sicht der Schienen würde aber der Abstand der Räder kleiner werden, die Spurweite wäre zu gross. Und da nicht beides gleichzeitig möglich ist gibt es keine Querkontraktion:

$$\boldsymbol{\Delta y' = \Delta y} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Delta z' = \Delta z} \tag{14.2}$$

Zugehörige Abschnitte in EEE :
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/b0_de/b3_de
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/b0_de/b4_de
https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/b0_de/b5_de

15. Die Desynchronisation

Uhren, die in gegeneinander bewegten Inertialsystemen ruhen, laufen nicht gleich schnell und können daher auch nicht nachhaltig synchronisiert werden. Ruhende Uhren innerhalb eines Inertialsystemes können sehr wohl permanent synchronisiert werden. Dieser Prozess ist eigentlich eine Definition der Zeit innerhalb eines Inertialsystems. Mehr dazu findet sich auf https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/b0_de/b1_de .

Synchronisiert Schwarz seine Uhren im System S (t,x,y,z) und macht Rot dasselbe in seinem System S' (t',x',y',z'), so sind für beide die Uhren in ihrem eigenen System synchronisiert - aber jeder hält die Uhren des anderen in einem ganz präzisen Sinn für desynchronisiert !! Schwarz hält die Uhren von Rot, die in ihrem System einen Eigenabstand $\Delta x'$ in der x'-Richtung haben, nach der folgenden Formel für desynchronisiert:

$$\Delta \boldsymbol{t}' = -\Delta \boldsymbol{x}' \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}^2} \tag{15.1}$$

oder

$$\Delta \boldsymbol{t}' \cdot \boldsymbol{c} = -\Delta \boldsymbol{x}' \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}} \tag{15.2}$$

Der Faktor c links in der zweiten Formel dient nur der Umrechnung von Zeiten in Längen. Die Desynchronisation ist damit proportional dem Eigenabstand der Uhren in Bewegungsrichtung und dem Verhältnis von v zu c . Das Minuszeichen bedeutet, dass vorauseilende Uhren zeitlich im Rückstand sind (aus der Sicht von Schwarz !). Diese Uhren sind ja auch dem Synchronisationsimpuls davongelaufen ...

Eine kurze Herleitung dieses Resultates finden Sie auf https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/b0_de/b6_de .

Ohne dieses dritte Grundphänomen bei der Erfassung von zeitlichen und räumlichen Messwerten erscheint die SRT schnell widersprüchlich. Wie ist es möglich, dass für jeden die Uhren des anderen langsamer laufen ? Führt das nicht zur Ungleichungskette $\Delta t' < \Delta t < \Delta t'$?? Viele populäre 'Widerlegungen' der SRT basieren auf diesem Kurzschluss.

Erst wenn man die Desynchronisation eines Satzes von schnellen Uhren hinzunimmt kann man alle Messungen in zwei Bezugssystemen widerspruchsfrei zusammenfügen, wie die Musteraufgabe im folgenden Abschnitt zeigt. Leider wird dieser Punkt nur in wenigen Büchern zur SRT klar herausgearbeitet, meist wird das gar nicht erwähnt.

16. Eine Musteraufgabe zur Kinematik

Wie die drei Grundphänomene Zeitdilatation, Längenkontraktion und Desynchronisation zusammenspielen sieht man schön anhand der folgenden simplen Musteraufgabe.

Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.8 \cdot c$ durch ein 12 m langes Rohr, welches an beiden Enden mit Detektoren ausgerüstet ist, sodass man die Durchflugzeit sehr genau messen kann. Schwarz sei das System in welchem das Rohr ruht, Rot nennen wir das Ruhesystem des Teilchens. Es sollen die folgenden Fragen beantwortet werden:

1. Wie lange dauert der Flug des Teilchens durch das Rohr für Schwarz ?
2. Wieviel Zeit verstreicht dabei im roten System nach der Ansicht von Schwarz ?
3. Welche Länge hat das Rohr für Rot ?
4. Wie lange dauert es für Rot, bis das Rohr über das Teilchen hinweggerast ist ?
5. Wieviel Zeit verstreicht aus der Sicht von Rot während dieses Vorbeiflugs auf jeder Uhr von Schwarz ?
6. Wie erklärt sich Rot den Messwert von Schwarz ?

Die letzten beiden Fragen werden in den meisten Schulbüchern einfach weggelassen, dabei bilden sie den Schlussstein im Bogen des Verständnisses der SRT. Sie müssen auch weggelassen werden wenn man die Desynchronisation nicht behandelt ...

Dabei sind die Fragen alle schnell und leicht zu beantworten. Mit √ bezeichnen wir den Term

$$\surd \;=\; \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;=\; \sqrt{1 - 0.8^2} \;=\; 0.6$$

1. Die Zeitdauer erhalten wir, wenn wir die Weglänge durch die Geschwindigkeit dividieren:
   $\Delta t \;=\; \Delta x \,/\, v \;=\; 12\text{ m} \,/\, (0.8 \cdot 3 \cdot 10^8\text{ m/s}) \;=\; 50\text{ ns}$
2. Rot wird aus der Sicht von Schwarz wegen der Zeitdilatation eine kürzere Dauer messen:
   $\Delta t' \;=\; \Delta t \cdot \surd \;=\; 50\text{ ns} \cdot 0.6 \;=\; 30\text{ ns}$
3. Rot sieht das schnelle Rohr Lorentz-verkürzt: $\Delta x' \;=\; \Delta x \cdot \surd \;=\; 12\text{ m} \cdot 0.6 \;=\; 7.2\text{ m}$
4. Bis das 7.2 m lange Rohr über Rot hinweggeflogen ist verstreicht auf der Uhr von Rot die Zeit
   $\Delta t' \;=\; \Delta x' \,/\, v \;=\; 7.2\text{ m} \,/\, (0.8 \cdot 3 \cdot 10^8\text{ m/s}) \;=\; 30\text{ ns}$
   Schwarz und Rot sind sich also einig über den Messwert von Rot !
5. Die schnellen Uhren von Schwarz ticken aus der Sicht von Rot verlangsamt, auf jeder der beiden schwarzen Uhren vergeht aus der Sicht von Rot nur die Zeit $\Delta t \;=\; \Delta t' \cdot \surd \;=\; 30\text{ ns} \cdot 0.6 \;=\; 18\text{ ns}$!!
6. Rot kann sich trotzdem ausrechnen, dass Schwarz eine Zeitdauer von 50 ns misst. Die beiden Uhren von Schwarz sind ja aus der Sicht von Rot desynchronisiert, und zwar um den Betrag
   $\Delta t \;=\; \Delta x \cdot v \,/\, c^2 \;=\; 12\text{ m} \cdot 0.8 \,/\, (3 \cdot 10^8\text{ m/s}) \;=\; 32\text{ ns}$. Zusammen mit den 18 ns, welche 'eigentlich' auf den Uhren von Schwarz während des Vorbeiflugs verstreichen (aus der Sicht von Rot), ergeben sich ebenfalls die 50 ns, die Schwarz tatsächlich misst. Vergewissern Sie sich, dass auch das Vorzeichen der Desynchronisation von der Formel richtig bestimmt wird !

Schwarz braucht für seine Messung zwei distante Uhren, deren Synchronisation kein objektiver Tatbestand ist. Rot und Schwarz können sich beide ausrechnen, welche Werte der andere messen wird, und diese Werte stimmen mit den jeweiligen gemessenen Werten auch überein. Sie messen zwar beide unterschiedliche Zeitintervalle und Streckenlängen, aber es ergeben sich daraus keine Widersprüche. Die gemessenen Werte sind 'relativ', aber nicht beliebig.

17. Quergeschwindigkeiten und der transversale Dopplereffekt

Die Inertialsysteme von "Rot" und "Schwarz" sollen sich mit v respektive $-v$ gegeneinander bewegen. Die Systeme seien wie immer so ausgerichtet, dass ihre x-Achsen aufeinander liegen und die y-Achsen und z-Achsen parallel sind.

Im Bezugssystem S' (t',x',y',z') von Rot soll sich nun ein Objekt mit der Geschwindigkeit u' in der y'-Richtung bewegen. Wie gross ist die y-Komponente u der Geschwindigkeit, die Schwarz in seinem System S (t,x,y,z) an diesem Objekt misst ?

Es ist $u = \Delta y / \Delta t$, $u' = \Delta y' / \Delta t'$. Nach (14.2) gilt $\Delta y = \Delta y'$, und für Schwarz gilt zudem $\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Damit können wir für u schreiben

$$\boldsymbol{u} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \boldsymbol{u'} \cdot \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}} \qquad (17.1)$$

Schwarz sieht diese *Quergeschwindigkeit* verlangsamt um den bekannten Wurzelfaktor. Für Schwarz läuft im System von Rot alles etwas retardiert ab. Mit dieser Bemerkung kommen wir nochmals auf den *transversalen Dopplereffekt* zurück:

Rot soll im Abstand Δx die x-Achse von Schwarz mit der Geschwindigkeit v in y-Richtung überqueren. Dabei ändert sich der Abstand von Rot zu Schwarz gerade nicht. Trotzdem ist ein Oszillator von Rot aus der Sicht von Schwarz der Zeitdilatation unterworfen. Wenn er in seinem System mit der Frequenz f' sendet empfängt Schwarz die verminderte Frequenz

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f'} \cdot \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}} \qquad (1.6) \quad \equiv \quad (17.2)$$

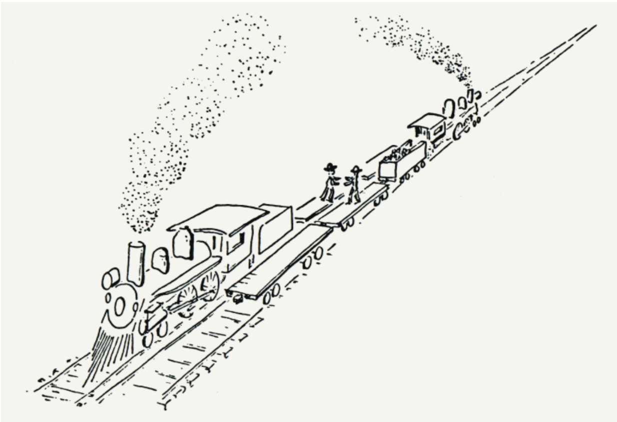
Das ist nochmals die Formel für den sogenannten 'transversalen Dopplereffekt'. Dieser ist ein rein relativistisches Phänomen, er hat keine Entsprechung in der 'klassischen' Physik. Aus der Sicht von Schwarz laufen eben im schnellen System von Rot wirklich alle Vorgänge etwas retardiert ab ...

... und für Rot ist es natürlich genau umgekehrt !

18. Eine Herleitung des relativistischen Impulses ohne Verwendung der Erhaltungssätze

Im Abschnitt 4 haben wir die Formeln für die 'dynamische Masse' und den relativistischen Impuls aus dem Wunsch abgeleitet, dass weiter Erhaltungssätze für den Impuls **und** für eine 'dynamische Masse' gelten sollen. Nun stellen wir noch eine elegante Herleitung der Ausdrücke
für diese Grössen vor, welche keinen Gebrauch macht von diesen Erhaltungssätzen.

Die Darstellung ist identisch mit derjenigen auf https://www.relativity.li/de/epstein/lesen/e0_de/e1_de .
Zwei eineiige Zwillige (bei Epstein heissen sie Peter und Danny) sollen auf zwei Einstein-Zügen aneinander vorbeifahren und dabei einen völlig symmetrischen Faustschlag senkrecht zur Fahrtrichtung inszenieren:



Ihre Relativgeschwindigkeit in der Fahrtrichtung des Zuges sei v , beide Fäuste sollen dieselbe Ruhemasse m_0 haben und beide sollen (in ihrem eigenen Bezugssystem) mit derselben Geschwindigkeit u quer zur Fahrtrichtung zuschlagen. Aus Symmetriegründen gilt somit für die beiden Impulse

$$p_y(Peter) \;=\; -\,p_y(Danny)$$

Peter sieht die Quergeschwindigkeit von Dannys Faust aber nach (17.1) verlangsamt und er wundert sich, dass Danny trotzdem genau gleich hart zugeschlagen hat wie er selber. Das ist nur möglich, wenn Danny mehr Masse in seiner Faust versteckt hat ! Wir müssen also zulassen, dass die Masse eines Objekts von dessen Relativgeschwindigkeit abhängig sein kann. Peter stellt daher mit (17.1) für die Impulse in der y-Richtung die folgende Gleichung auf:

$$m_u \cdot u \;=\; -\,m_{v+u'} \cdot u' \;=\; -\,m_{v+u'} \cdot (-u) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dabei soll hier für den Moment im tiefgestellten Index der Ausdruck $v + u'$ für den *Betrag der vektoriellen Summe* der beiden Geschwindigkeitskomponenten stehen. Wir dividieren durch u und erhalten

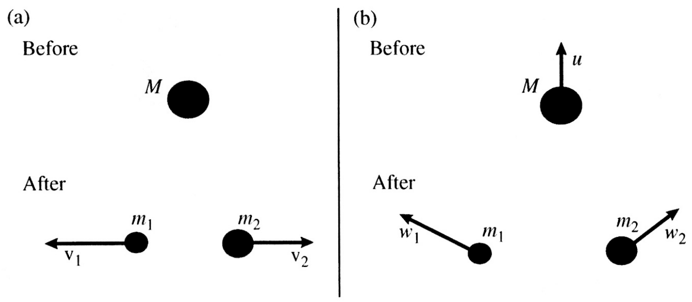
$$m_u \;=\; m_{v+u'} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Diese Gleichung gilt für beliebig kleine Quergeschwindigkeiten u . Sie gilt somit auch im Grenzfall $u \to 0$. Dann ist auch $u' = 0$, m_u wird zu m_0 , $m_{v+u'}$ wird zu m_v und wir erhalten die Gleichungen (4.1) und (4.2) :

$$\boldsymbol{m_v \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \gamma \cdot m_0} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{p \;=\; m_v \cdot v \;=\; \gamma \cdot m_0 \cdot v} \tag{18.1}$$

19. Aus der Impulserhaltung folgt die Erhaltung der 'dynamischen Masse'

Im Abschnitt 18 haben wir die Formeln (4.1) und (4.2) für die dynamische Masse und den relativistischen Impuls hergeleitet ohne die Erhaltungssätze für Masse und Energie vorauszusetzen. Jetzt zeigen wir noch, dass aus dem Impulserhaltungssatz folgt, dass ein Massen-Erhaltungssatz nur für die 'dynamische Masse' gelten kann. Die Darstellung ist dem schönen Buch "The Wonderful World of Relativity" von Andrew M. Steane (Oxford University Press 2011) entnommen. Das gilt auch für die folgende Figur:



Die linke Bildhälfte (a) zeigt eine ruhende Masse *M* , welche in zwei Stücke mit den Ruhemassen m_1 und m_2 zerplatzt. Diese fliegen wegen der Impulserhaltung mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in entgegengesetzte Richtungen auseinander. Die rechte Bildhälfte (b) zeigt denselben Vorgang in einem Bezugssystem welches sich relativ zum vorangehenden mit der Geschwindigkeit u nach unten bewegt. Die vertikale Komponente der Impulserhaltung liefert die Gleichung

$$M \cdot u \cdot \gamma_u \;=\; m_1 \cdot u \cdot \gamma_{w_1} \;+\; m_2 \cdot u \cdot \gamma_{w_2}$$

Nach der Division durch u haben wir noch

$$M \cdot \gamma_u \;=\; m_1 \cdot \gamma_{w_1} \;+\; m_2 \cdot \gamma_{w_2}$$

Diese Gleichung gilt für beliebig kleine Werte der Geschwindigkeit u . Der Grenzwert für u gegen null liefert

$$M \;=\; m_1 \cdot \gamma_{v_1} \;+\; m_2 \cdot \gamma_{v_2} \tag{19.1}$$

Das ist die Erhaltung der 'dynamischen Masse' bei diesen Vorgang ! Die Ruhemasse bleibt *nicht* erhalten, die Werte von γ_{v_1} und γ_{v_2} sind ja als Kehrwerte des Wurzelausdrucks grösser als 1 ; es ist $M \;>\; m_1 \;+\; m_2$.

Nun schreiben wir (immer noch mit Andrew M. Steane) die Gleichung (19.1) noch ein bisschen um:

$$\boldsymbol{M \;=\; m_1 \;+\; m_1 \cdot (\gamma_{v_1} - 1) \;+\; m_2 \;+\; m_2 \cdot (\gamma_{v_2} \;-1)} \tag{19.2}$$

Man sieht schön wie sich rechts, nach der Spaltung, die gesamte dynamische Masse aus den beiden Ruhemassen und je einer kleinen zusätzlichen Masse zusammensetzt. Multiplizieren wir die ganze Gleichung mit c^2 entsteht aus dem Erhaltungssatz der dynamischen Massen der Erhaltungssatz der Gesamtenergie:

$$\boldsymbol{M \cdot c^2 \;=\; m_1 \cdot c^2 \;+\; m_1 \cdot c^2 \cdot (\gamma_{v_1} - 1) \;+\; m_2 \cdot c^2 \;+\; m_2 \cdot c^2 \cdot (\gamma_{v_2} \;-1)} \tag{19.3}$$

Die Gesamtenergie setzt sich rechts zusammen aus den beiden Ruheenergien und den beiden kinetischen Energien. Akzeptiert man die Existenz einer Ruheenergie haben wir hier eine weitere Herleitung des technischen Terms für die kinetische Energie aus dem Impulserhaltungssatz.

Diese Herleitung wird in der zeitlichen Umkehr als vollkommen inelastischer Stoss schon 1920 von Max Born in seinem Buch "Die Relativitätstheorie Einsteins" vorgestellt (neu aufgelegt im Springer Verlag ab 1964).

20. Die Lorentz-Transformationen

Die Inertialsysteme von "Rot" und "Schwarz" sollen sich mit v respektive $-v$ gegeneinander bewegen. Die Systeme seien wie immer so ausgerichtet, dass ihre x-Achsen aufeinander liegen und die y-Achsen und z-Achsen parallel sind. Schwarz ordne in seinem Bezugssystem S Ereignissen die Koordinaten (*t,x,y,z*) zu, Rot bestimme für dieselben Ereignisse in seinem Bezugssystem S' die Koordinaten (*t',x',y',z'*) . Wie lassen sich die Koordinaten desselben Ereignisses von einem System ins andere umrechnen ?

Weil es nach (14.2) keine Querkontraktion gibt, gilt in unserer Konfiguration

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z'} \tag{20.1}$$

Für die Umrechnung der Zeitkoordinaten und der x-Koordinaten nehmen wir zusätzlich an, dass Rot und Schwarz bei der Begegnung ihrer Nullpunkte auf der x-Achse ihre dortigen Uhren auf null gestellt haben und anschliessend alle Uhren in ihrem jeweiligen Bezugssystem mit der 'Mutteruhr' im Nullpunkt synchronisiert haben. Es können ja nur die Messwerte von Zeit*intervallen* und Orts*intervallen* (also Streckenlängen) verglichen werden, es muss also zuerst ein gemeinsames *Referenzereignis* vorliegen. Späteren Ereignissen wird dann der zeitliche und der räumliche Abstand zu diesem Referenzereignis oder Nullpunkt-Ereignis zugeordnet.

Rot messe nun die Koordinaten (t', x') zu einem bestimmten Ereignis. Die rote Uhr am Ort x' ist aber für Schwarz nach (14.1) gegenüber der Nullpunktsuhr von Rot desynchronisiert, diese zeigt dann schon die Zeit

$$t' + \frac{x' \cdot v}{c^2}$$

an. Weil auch die Nullpunktsuhr wie alle Uhren von Rot um den Wurzelterm langsamer geht als die Uhren von Schwarz berechnet sich Schwarz seinen Uhrenstand bei diesem Ereigniss zu

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t'} + \dfrac{\boldsymbol{x' \cdot v}}{\boldsymbol{c^2}}}{\sqrt{\mathbf{1} - \dfrac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \tag{20.2}$$

Welchen Abstand x ordnet Schwarz diesem Ereignis zu ? Der Nullpunkt von Rot bewegt sich nach der Formel $O_{rot} = v \cdot t$. Schwarz sagt dass Rot den Abstand x' des Ereignisses vom eigenen Nullpunkt nach (14.1) lorentz-verkürzt sieht. Daher notiert sich Schwarz

$$\boldsymbol{x} = v \cdot t + \frac{x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{v \cdot t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\boldsymbol{x' + v \cdot t'}}{\sqrt{\mathbf{1} - \dfrac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \tag{20.3}$$

Die räumlichen und zeitlichen Koordinaten lassen sich nicht mehr separieren.

Die Situation von Schwarz und Rot ist völlig symmetrisch, für die umgekehrte Umrechnung ist nur das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit v zu wechseln. Diesem Satz von Koordinatentransformationen hat Henri Poincaré zu Recht den Namen 'Lorentz-Transformationen' gegeben. Hendrik Antoon Lorentz hat sie kurz vor 1900 als Kunstgriff eingeführt um den Konflikt zwischen der konstanten Lichtgeschwindigkeit und dem Äther rechnerisch zu beheben. Poincaré hat auch gezeigt, dass diese Transformationen eine Gruppe bilden im Sinne der Gruppentheorie.

Wir stellen die Transformationen in beide Richtungen noch zusammen:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t'} + \frac{\boldsymbol{x'} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \qquad \boldsymbol{t'} = \frac{\boldsymbol{t} - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t'}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \qquad \boldsymbol{x'} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'} \qquad \boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z'} \qquad \boldsymbol{z'} = \boldsymbol{z} \qquad (20.4)$$

Wir werden diese Transformationen brauchen um Differentiale zu berechnen wie etwa $dx' \,/\, dt$ oder $dt \,/\, dt'$.

Newtons absolute Zeit verlangt $t = t'$, zusammen mit seinem absoluten Raum folgen noch $x = x' + v \cdot t'$ und $x' = x - v \cdot t$. Das sind die bekannten Galilei-Transformationen. Sie folgen aus den Lorentz-Transformationen wenn man den Limes für $c \to \infty$ bildet. Allein schon die *Existenz einer Grenzgeschwindigkeit* ist nicht kompatibel mit Newtons Vorstellungen von Zeit und Raum, sie erzwingt die Aussagen der speziellen Relativitätstheorie !

Wir schreiben diese Lorentz-Transformationen auch noch unter Verwendung der Terme β_v und γ_v wie sie in (6.2) und (6.3) definiert worden sind:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\gamma_v} \cdot \left(\boldsymbol{t'} + \boldsymbol{\beta_v} \cdot \frac{\boldsymbol{x'}}{\boldsymbol{c}}\right) \qquad \boldsymbol{t'} = \boldsymbol{\gamma_v} \cdot \left(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\beta_v} \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}}\right)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma_v} \cdot (\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{\beta_v} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{t'}) \qquad \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{\gamma_v} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta_v} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'} \qquad \boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z'} \qquad \boldsymbol{z'} = \boldsymbol{z} \qquad (20.5)$$

Multipliziert man die oberen Gleichungen für t und t' mit c erhalten die Gleichungen für die Variablen $c \cdot t$ und $c \cdot t'$ dieselbe Gestalt wie diejenigen für die Variablen x und x' . Dasselbe wird auch erreicht, wenn man durch die Wahl von anderen Einheiten für die Zeit- oder die Längenmessung dafür sorgt, dass der Wert der Lichtgeschwindigkeit 1 wird.

Die gesamte Symmetriegruppe der SRT entsteht, wenn man zu diesen Lorentz-Transformationen noch die Rotationen des Raumes hinzunimmt. Diese umfassendere Gruppe nennt man manchmal die Poincaré-Gruppe. Poincaré hat auch gezeigt, dass diese Gruppe gerade die Symmetriegruppe der Maxwell'schen Theorie darstellt.

Die Lorentz-Transformationen behandeln ja nur den Fall von Bezugssystemen, die speziell zueinander ausgerichtet sind (die x-Achse und die x'-Achse liegen aufeinander und sind parallel zur Relativgeschwindigkeit, zudem sind auch die beiden y-Achsen und z-Achsen parallel). Im angelsächsischen Raum spricht man in diesem Spezialfall auch von einem 'Lorentz boost'. Bei der Wahl des Koordinatensystems ist man aber frei, und warum soll man es sich dabei freiwillig schwer machen ?

21. Die Transformation von beliebigen Geschwindigkeiten

Mithilfe der Lorentz-Transformationen leiten wir nun die Formeln für die 'Addition' beliebiger Geschwindigkeiten her.

Die Inertialsysteme seien wieder wie im letzten Abschnitt festgelegt. Rot bewegt sich mit $\boldsymbol{v}$ entlang der x-Achse von Schwarz. Im System von Rot bewege sich ein Objekt mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}'$ in eine beliebige Richtung. Welche Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ hat dieses Objekt im System von Schwarz ?

Es ist

$$\boldsymbol{v} = (v, 0, 0) \quad , \quad \boldsymbol{u}' = (u_x', u_y', u_z') = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Wir berechnen die einzelnen Komponenten von $\boldsymbol{u}$. Die Ableitungen gewinnen wir aus den Formeln (20.5) des letzten Abschnitts :

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\gamma \cdot \left(\frac{dx'}{dt'} + \beta \cdot c \cdot \frac{dt'}{dt'}\right)}{\gamma \cdot \left(\frac{dt'}{dt'} + \beta \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u_x' + \frac{v}{c} \cdot c \cdot 1}{1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{c} \cdot u_x'} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v \cdot u_x'}{c^2}} \qquad (21.1)$$

Wir haben damit die Formel (2.1) für die 'Addition' paralleler Geschwindigkeiten nochmals hergeleitet.

Ganz ähnlich bestimmen wir u_y und u_z :

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma \cdot \left(\frac{dt'}{dt'} + \beta \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u_y'}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{c} \cdot u_x'\right)} = \frac{u_y'}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v \cdot u_x'}{c^2}\right)} \qquad (21.2)$$

$$\text{und genauso} \qquad u_z = \dots \dots = \frac{u_z'}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v \cdot u_x'}{c^2}\right)} \qquad (21.3)$$

Will man $\boldsymbol{u}'$ aus $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}$ berechnen kann man dieselben Formeln verwenden, man muss nur überall $\boldsymbol{v}$ durch $-\boldsymbol{v}$ ersetzen.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass die z-Komponente von $\boldsymbol{u}'$ (und damit auch die z-Komponente von $\boldsymbol{u}$) null sei. Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, durch Rotation der Systeme S und S' um die x-Achse lässt sich immer erreichen dass die x-y-Ebene mit der Ebene zusammenfällt, welche durch $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}'$ aufgespannt wird.

α' soll den Zwischenwinkel von $\boldsymbol{u}'$ und $\boldsymbol{v}$ bezeichnen. Mit $u_z' = 0$ gilt

$$tan(\alpha') = \frac{u_y'}{u_x'} \qquad (21.4)$$

Welchen Winkel α bilden dann $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$?

Wir berechnen $tan(\alpha)$ mit (21.1) und (21.2) :

$$tan(\alpha) \ = \frac{u_y}{u_x} \ = \frac{\dfrac{u_y{}'}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{v \cdot u_x{}'}{c^2}\right)}}{\dfrac{u_x{}' \ + \ v}{\left(1 + \dfrac{v \cdot u_x{}'}{c^2}\right)}} \ = \frac{u_y{}' \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{u_x{}' \ + \ v} \ = \frac{u_y{}'}{\gamma \cdot (u_x{}' \ + \ v)} \qquad (21.5)$$

Aus

$$\boldsymbol{u}^2 \ = \ (u_x)^2 \ + \left(u_y\right)^2 \quad , \quad \boldsymbol{u}'^2 \ = \ (u_x{}')^2 \ + \left(u_y{}'\right)^2 \qquad \text{und} \qquad tan(\alpha') \ = \frac{u_y{}'}{u_x{}'}$$

erhält Einstein "nach einfacher Rechnung"

$$\boldsymbol{u} \ = \frac{\sqrt{(v^2 \ + u'^2 \ + 2 \cdot v \cdot u' \cdot cos\ \alpha' \,) \ - \left(\dfrac{v \cdot u' \cdot sin\ \alpha'}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{v \cdot u_x{}' \cdot cos\ \alpha'}{c^2}} \qquad (21.6)$$

Er schreibt dazu: "Es ist bemerkenswert, dass $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}'$ in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch $\boldsymbol{u}'$ die Richtung der x-Achse so erhalten wir ..." ... wieder die Formel (2.1). Dann ist ja $cos(\alpha') = 1$ und $sin(\alpha') = 0$.

Einsteins "einfache Rechnung" ist tatsächlich mit den Formeln (21.1) und (21.2) gut durchführbar.

Jetzt können wir auch die Formel (17.1) noch ein bisschen 'gelehrter' herleiten. Für eine reine Quergeschwindigkeit $\boldsymbol{u}' \ = \ (\, 0 \, , u_y{}' \, , 0 \,)$ gilt nach (21.2)

$$\boldsymbol{u_y} \ = \frac{u_y{}'}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{v \cdot u_x{}'}{c^2}\right)} \ = \frac{u_y{}'}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{v \cdot 0}{c^2}\right)} \ = \boldsymbol{u_y}' \cdot \sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}} \qquad (17.1) \quad \equiv \quad (21.7)$$

22. Die Aberration des Lichts

Die Rechnungen des letzten Abschnittes gelten für beliebige Geschwindigkeiten $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}'$, somit auch für das Licht welches von einem weit entfernten Stern bei Schwarz unter dem Winkel α zur x-Achse eintrifft. Wir zerlegen die Lichtgeschwindigkeit in ihre Komponenten

$$u_x = -c \cdot cos\,\alpha \quad , \quad u_y = c \cdot sin\,\alpha \qquad \text{und} \qquad u_z = 0$$

α ist also nach unserer Wahl ein spitzer Winkel für Lichtquellen mit positiver x-Koordinate. Gemäss den Formeln (21.1) und (21.2) hat die Geschwindigkeit dieser Lichtteilchen für Rot, welcher dem Licht entgegeneilt, die Komponenten

$$u_x{}' = \frac{-c \cdot cos\,\alpha - v}{1 + \frac{-v \cdot (-c) \cdot cos\,\alpha}{c^2}} = \frac{-c \cdot cos\,\alpha - v}{1 + \frac{v \cdot cos\,\alpha}{c}}$$

$$u_y{}' = \frac{c \cdot sin\,\alpha}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{-v \cdot (-c) \cdot cos\,\alpha}{c^2}\right)} = \frac{c \cdot sin\,\alpha}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v \cdot cos\,\alpha}{c}\right)}$$

Eine kleine Kontrollrechnung zeigt dass immer noch gilt $(u_x{}')^2 + (u_y{}')^2 = c^2$.

Für Rot trifft das Licht von diesem Stern unter einem spitzen Winkel α' zur x-Achse ein für den gilt

$$\boldsymbol{tan\,\alpha'} = \frac{u_y{}'}{-u_x{}'} = \frac{\frac{c \cdot sin\,\alpha}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{v \cdot cos\,\alpha}{c}\right)}}{\frac{c \cdot cos\,\alpha + v}{\left(1 + \frac{v \cdot cos\,\alpha}{c}\right)}} = \frac{sin\,\alpha}{\gamma \cdot \left(cos\,\alpha + \frac{v}{c}\right)} = \frac{\boldsymbol{sin\,\alpha}}{\boldsymbol{\gamma \cdot (cos\,\alpha + \beta)}} \tag{22.1}$$

Einstein hat in seiner Originalpublikation eine andere Formel bevorzugt, die wir auch leicht herleiten können:

$$\boldsymbol{cos\,\alpha'} = \frac{-u_x{}'}{c} = \frac{cos\,\alpha + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v \cdot cos\,\alpha}{c}} = \frac{\boldsymbol{cos\,\alpha + \beta}}{\boldsymbol{1 + \beta \cdot cos\,\alpha}} \tag{22.2}$$

Einstein schreibt dazu: "Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus." Die Vorzeichen sind bei ihm allerdings anders, da er nicht unseren Winkel α sondern $\varphi = 180° - \alpha$ verwendet. Für den Spezialfall von $\alpha = 90°$ erhält man aus (21.2) $cos \propto ' = \beta = v/c$. Für die Abweichung δ' vom 90°-Winkel gilt also $sin\,\delta' = cos\,\alpha' = v/c$.
Bis 1905 hat man, der 'alten' Addition von Geschwindigkeiten folgend, mit dem 'falschen' Ausdruck $tan\,\delta' = v/c$ gerechnet. Der Unterschied ist bei diesen kleinen Winkeln allerdings verschwindend.

Für die Beziehung zwischen α und α' können wir noch eine schöne symmetrische Variante ableiten. Es gilt ja für alle Winkel

$$tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}$$

Mit (21.1) und (21.2) erhalten wir damit

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \frac{\sin\alpha'}{1 + \cos\alpha'} = \frac{\frac{u_y{}'}{c}}{1 - \frac{u_x{}'}{c}} = \frac{\frac{sin\,\alpha}{\gamma \cdot (1 + \beta \cdot cos\,\alpha)}}{1 + \frac{cos\,\alpha + \beta}{1 + \beta \cdot cos\,\alpha}} = \frac{sin\,\alpha}{\gamma \cdot (1 + \beta \cdot cos\,\alpha + cos\,\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{sin\ \alpha}{\gamma \cdot (1+\beta) \cdot (1+cos\ \alpha)} = \frac{1}{\gamma \cdot (1+\beta)} \cdot \frac{sin\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\beta)} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\beta} \cdot \sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\beta} \cdot \sqrt{1+\beta}} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2}$$

Wir halten fest:

$$\boldsymbol{tan\ \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot tan\ \frac{\alpha}{2}} \qquad (22.3)$$

Astronom "Rot", der dem Stern mit der Geschwindigkeit v entgegeneilt, sieht diesen unter dem *kleineren* Winkel α' zur Richtung seiner x'-Achse als es Schwarz tut, der relativ zum Stern ruht oder sich diesem weniger schnell nähert.

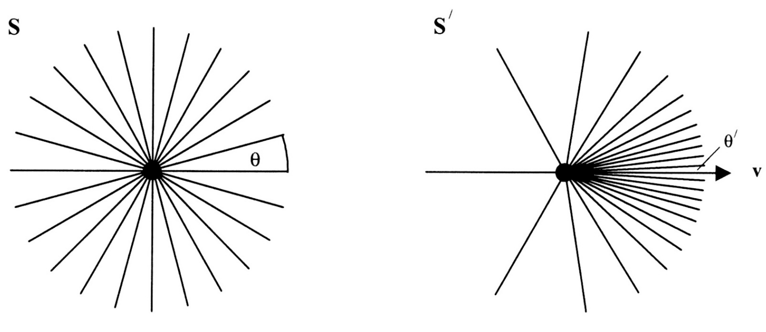
'aberrare' heisst abirren, abweichen. Diesen Effekt hat James Bradley 1727 angeblich bei einer Kutschenfahrt im englischen Regen entdeckt. Er beobachtete, dass der Regen immer mehr von vorne zu kommen schien je schneller die Kutsche fuhr, und er realisierte, dass sich dieser Effekt bei einer endlichen Lichtgeschwindigkeit auch beim Licht bemerkbar machen müsste.

Mit der Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne (etwa 30 km/s) macht das bei einem Stern der querab zur Bahnrichtung liegt (α = 90°) etwa 20 Bogensekunden aus :

$$tan\ \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot tan\ \frac{90°}{2} \approx \sqrt{\frac{300'000-30}{300'000+30}} \cdot 1$$

$$\alpha' = 2 \cdot \frac{\alpha'}{2} = 2 \cdot arc\ tan\left(\sqrt{\frac{300'000-30}{300'000+30}}\right) \approx 89°\ 59'\ 39.4''$$

Die folgende Abbildung ist (mit Anpassungen an dieses Skriptum) dem Buch "Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger" von Jürgen Freund entnommen (vdf Hochschulverlag Zürich 2004). Sie zeigt wie eine im System S isotrope Strahlung einen schnellen Beobachter im System S' konzentriert von vorne erreicht, genau wie die Regentropfen es bei einem schnellen Fussgänger machen:

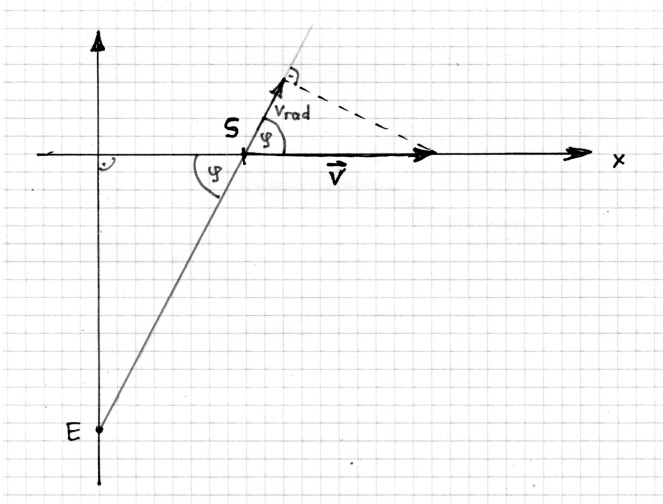


Die Graphik ist für $v = 0.9 \cdot c$ gerechnet. Die Strahlung kommt für den schnellen Rot nicht nur konzentriert von vorne, sie hat dort wegen dem Doppler-Effekt auch eine erhöhte Frequenz. Aus sichtbarem Licht könnte bei sehr grossen Geschwindigkeiten eine gefährliche UV- oder Röntgenstrahlung werden. Und 'hinten' wird es dunkel ...

Die Spezialfälle dieser Frequenzverschiebungen, den longitudinalen und den transversalen Dopplereffekt, haben wir bereits behandelt. Den allgemeinen Fall studieren wir der Vollständigkeit halber noch im nächsten Abschnitt.

23. Die allgemeine Dopplerformel

Ein Sender S bewege sich gemäss Skizze im Koordinatensystem des ruhenden Empfängers E mit der Geschwindigkeit v . Er sende (in seinem System) mit der Frequenz f_S .



Zwei Effekte sorgen dafür, dass der Empfänger das Signal bei einer (hier verminderten) Frequenz f_E empfängt:

a) Die Zeitdilatation bewirkt, dass der Oszillator des Senders aus der Sicht des Empfängers um den Wurzelausdruck verlangsamt schwingt. Dieser Effekt ist unabhängig von der Richtung der Relativ-geschwindigkeit.

b) Die zunehmende Entfernung hat (aus der Sicht des Empfängers) eine Streckung der Wellenlänge zur Folge gemäss dem longitudinalen Dopplereffekt. Für diesen Anteil ist nur die Radialgeschwindigkeit $v_{rad} = v \cdot \cos\varphi$ verantwortlich.

Wir können somit für den Dopplereffekt im vorliegenden allgemeinen Fall dieselbe Rechnung wie bei (1.4) verwenden, wir brauchen nur am richtigen Ort für v die Radialgeschwindigkeit v_{rad} einzusetzen:

$$f_E = f_S \cdot \frac{c}{c + v_{rad}} \cdot r(v) = f_S \cdot \frac{c}{c + v \cdot \cos\varphi} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = f_S \cdot \frac{1}{1 + \frac{v \cdot \cos\varphi}{c}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Also

$$\boldsymbol{f_E = f_S \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c + v \cdot \cos\varphi} = f_S \cdot \frac{1}{\gamma \cdot (1 + \beta \cdot \cos\varphi)}} \qquad (23.1)$$

Andere Autoren verwenden den Winkel $\theta = 180° - \varphi$ und haben entsprechend ein Minuszeichen im Nenner.

Noch eine kleine Kontrolle:

- Im Fall von $\varphi = 0$ entfernt sich der Sender direkt vom Empfänger entlang der Verbindungsstrecke ES. Dann ist $v_{rad} = v$ und $\cos\varphi = 1$ und wir sind im Spezialfall des longitudinalen Dopplereffekts nach (1.4).

- Im Fall von $\varphi = 90°$ bewegt sich der Sender quer zur Sichtlinie zum Empfänger. Dann ist $v_{rad} = 0$ und $\cos\varphi = 0$ und wir erhalten die Formeln (1.6) oder (17.2) des transversalen Dopplereffekts.

24. Vierervektoren, Dreiervektoren und Newtons zweites Gesetz

Ein sehr leistungsvolles Werkzeug beim Lösen von Aufgaben in der SRT sind *Vierervektoren*. Die zeitliche und die drei räumlichen Koordinaten eines Ereignisses werden zu einem Vektor mit vier Komponenten zusammengefasst:

$$X \ = \ (\ c \cdot t, x, y, z\ ) = \ (\ c \cdot t\ ,\ \ \vec{x}\ )$$

Die Zeitkomponente wird mit c multipliziert damit alle 4 Komponenten dieselben Einheiten haben. X ist der *Viererort* eines Ereignisses in der 4d-*Raumzeit*. Die *Vierergeschwindigkeit* gewinnt man daraus aber nicht durch Ableitung nach der Zeit t , da die Zeit ja verschieden schnell läuft in verschiedenen Bezugssystemen. Man leitet nach der *Eigenzeit* τ ab, der Zeit im aktuellen Ruhesystem des schnellen Objekts. Für die Vierergeschwindigkeit V erhält man dabei

$$V \ = \ \frac{d}{d\tau}\ (X) \ = \ \frac{d}{dt}(X) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{d}{dt}(X) \ = \ \gamma \cdot (\ c\ ,\ \ \vec{v}\ )$$

Multipliziert man die Vierergeschwindigkeit mit der Ruhemasse m_0 , so erhält man den *Viererimpuls*

$$P \ = \ m_0 \cdot V \ = \ \gamma \cdot m_0 \cdot (\ c\ ,\ \ \vec{v}\ ) \ = \ \left(\frac{E_{tot}}{c}\ ,\ \ \vec{p}\right) \tag{24.1}$$

Dabei haben wir (4.2) und (5.4) benützt. Für den Impuls $\vec{p}$ ist hier also die relativistisch korrigierte Variante einzusetzen !

Weiter wird die *Viererkraft* F definiert durch

$$F \ = \ \frac{d}{d\tau}\ (P) \ = \ \frac{d}{dt}(P) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{d}{dt}(P) \ = \ \gamma \cdot (\frac{1}{c} \cdot \frac{dE_{tot}}{dt}\ ,\ \ \frac{d\vec{p}}{dt}) \ = \ \gamma \cdot (\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{v},\ \ \vec{f}\ ) \tag{24.2}$$

wo $\vec{f}$ für den traditionellen oder bisherigen 3d-Kraftvektor steht.

Wir arbeiten hier nicht mit Vierervektoren, wir möchten nur untersuchen, welche Beziehungen zwischen 3d-Vektoren in der SRT weiterhin gültig bleiben. Der räumliche Teil von (24.2) zeigt, dass in der SRT das zweite Axiom von Newtons Mechanik für die 'Dreiervektoren' scheinbar unverändert gültig bleibt :

$$\boldsymbol{\vec{f}} \ = \ \boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{24.3}$$

Die Anpassung an die SRT versteckt sich in der neuen Definition des Impulses. (24.3) braucht nicht bewiesen zu werden, das ist die *Definition* der Kraft $\vec{f}$, genauso wie sie das schon früher bei Newton war.

Die Gleichung für die Leistung gilt weiterhin ohne jede Anpassung, wie man der zeitlichen Komponente von (24.2) entnehmen kann :

$$\frac{dE}{dt} \ = \ \vec{f} \cdot \vec{v} \ = \ \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad \text{oder} \qquad dE \ = \ \vec{f} \cdot d\vec{x} \tag{24.4}$$

Die rechte Seite von (24.4) ist ja nichts anderes als die Definition der Energie als gespeicherte Arbeit.

Im Abschnitt 5 haben wir (24.3) und (24.4) zur Berechnung der kinetischen Energie bereits eingesetzt:

$$\boldsymbol{dE} \ = \ \boldsymbol{\vec{f} \cdot \vec{v} \ \cdot dt} \ = \ \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \ \cdot dt \ = \ \frac{d\vec{p}}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt \ \ = \ \boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dv} \cdot \vec{v} \ \cdot dv} \tag{24.5}$$

Das Resultat dieser Rechnung, also (5.2), hat im Abschnitt 19 eine unabhängige Bestätigung gefunden.

Gehen wir noch einen Schritt weiter: Die *Vidererbeschleunigung* A ist definiert durch

$$A = \frac{d}{d\tau}(V)$$

Aufgund dieser Definition ist die Beziehung $F = m_0 \cdot A$ in der SRT universell gültig! Es ist ja

$$F = \frac{d}{d\tau}(P) = \frac{d}{d\tau}(m_0 \cdot V) = m_0 \cdot \frac{d}{d\tau}(V) = m_0 \cdot A$$

Die Darstellung der Vierebeschleunigung A durch Dreiervektoren ist ein bisschen kompliziert. Die Rechnung zeigt, dass gilt

$$A = \frac{d}{d\tau}(V) = \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{a} \cdot (c, \ \vec{v}) + \gamma^2 \cdot (0, \ \vec{a}) \qquad (24.6)$$

Aus $F = m_0 \cdot A$ erhalten wir mit (24.2) und (24.6)

$$\gamma \cdot (\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{v}, \ \vec{f}) = m_0 \cdot \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{a} \cdot (c, \ \vec{v}) + m_0 \cdot \gamma^2 \cdot (0, \ \vec{a}) \qquad (24.7)$$

In der SRT braucht die Dreierkraft $\vec{f}$ also nicht mehr parallel zu sein zur Dreierbeschleunigung $\vec{a}$!

Der komplizierte erste Summand auf der rechten Seite von (24.6) und (24.7) verschwindet wenn der Beschleunigungs-vektor senkrecht steht auf dem Vektor der Geschwindigkeit, wie es zum Beispiel bei der Lorentz-Kraft immer der Fall ist. Dann reduziert sich (24.7) zu

$$\gamma \cdot (\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{v}, \ \vec{f}) = m_0 \cdot \gamma^2 \cdot (0, \ \vec{a})$$

und wir haben $\vec{f} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{a}$. Um 1905 hat man in dieser Situation noch von der 'transversalen Masse' $\gamma \cdot m_0$ gesprochen.

Sind $\vec{v}$ und $\vec{a}$ parallel zueinander, erhält man aus (24.2) und (5.1) direkt

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma^3 \cdot m_0 \cdot \vec{a}$$

Man kann diesen Zusammenhang natürlich auch aus (24.7) ableiten. Die Grösse $\gamma^3 \cdot m_0$ hat man um 1905 mit 'longitudinaler Masse' bezeichnet.

In modernen Publikationen zur SRT wird mit der Masse eines Objekts ausschliesslich seine Ruhemasse m_0 bezeichnet. Ich erlaube mir aber weiterhin von der 'dynamischen Masse' $\gamma \cdot m_0$ zu sprechen, weil diese immerhin eine *Erhaltungsgrösse* ist. Sie ist auch proportional zur Gesamtenergie und damit zur Trägheit des betrachteten Objekts. Die Ruhemasse m_0 hingegen ist eine *Invariante*, sie hat in allen Bezugssystemen denselben Wert. Sie ist aber keine Erhaltungsgrösse.

Die Begriffe 'transversale Masse' und 'longitudinale Masse' werden seit über 100 Jahren nicht mehr benützt.

Eine recht ausführliche Einführung in das Rechnen mit Vierervektoren bietet die folgende Publikation des Autors dieses 'Schnellen Pfades' : https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/SRT mit Vierervektoren.pdf

25. Zur Axiomatik der Speziellen Relativitätstheorie

Die Notwendigkeit der SRT ergab sich aus den Bemühungen, das allgemeine Relativitätsprinzip mit Maxwells Theorie vom Elektromagnetismus zu versöhnen. In Maxwells Theorie breiten sich elektromagnetische Wellen im Vakuum unabhängig von der Geschwindigkeit des Senders in jedem Inertialsystem mit derselben konstanten Geschwindigkeit aus. Dies ist mit Newtons Mechanik und seinen Vorstellungen einer *Absoluten Zeit* und eines *Absoluten Raumes* nicht vereinbar. Lorentz hat versucht mit einer *Längenkontraktion* und der zusätzlichen Annahme einer *Lokalzeit* Maxwells Theorie mit der Newton'schen Mechanik zu verbinden. Er hat dabei bis 1900 schon einen grossen Teil der Mathematik der zukünftigen SRT entwickelt.

Im Denken der "Äthertheorie" der Lichtausbreitung war die Konstanz von c ein *Problem*. Einstein macht aus dem Problem (in Kenntnis der aktuellen experimentellen Ergebnisse) ein *Prinzip* oder ein *Axiom* und baut darauf eine neue Theorie auf ! Im Frühling 1905 hat Einstein erkannt, dass der Kern des Problems bei Newtons Absoluter Zeit liegt. Seine Analyse der Gleichzeitigkeit von Ereignissen führte zum Verständnis der drei Grundphänomene *Zeitdilatation*, *Längenkontraktion* und *Desynchronisation* und der Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie. Genauso hat er es später bei der Allgemeinen Relativitätstheorie gemacht: Das Problem war dort die Äquivalenz von träger und schwerer Masse, über die sich schon Newton gewundert hat. Einstein erhebt das Problem zu einem Axiom und leitet daraus (auf einem langen und beschwerlichen Weg) die Allgemeine Relativitätstheorie ab.

Die SRT basiert also auf dem Axiom

A1 Die Vakuums-Lichtgeschwindigkeit ist eine universelle Naturkonstante. Sie ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle oder des Beobachters.

Von den 4 Erhaltungssätzen der klassischen Physik (Masse, Energie, Impuls, elektrische Ladung) bleibt bei der Entwicklung der SRT nur einer unberührt, nämlich der Erhaltungssatz für die elektrische Ladung. Die Erhaltungssätze für Masse und Energie verschmelzen zu einem einzigen Erhaltungssatz, der wahlweise für die *dynamische Masse* oder die *Gesamtenergie* formuliert werden kann, wobei bei den Energien auch die *Ruheenergie* der beteiligten Körper berücksichtigt werden muss. Auch der Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls bleibt nicht ganz verschont, indem der Impulsbegriff selber eine Korrektur erfährt.

Der Abschnitt 18 zeigt, dass die Definitionen der 'dynamischen Masse' und des 'SRT Impulses' zwingend aus der Zeitdilatation folgen und keinen Erhaltungssatz voraussetzen.
Der Abschnitt 19 zeigt, dass die Erhaltung der 'dynamischen Masse' eine Folge der Impulserhaltung ist.
Und im Abschnitt 4 wird gezeigt, dass die Definitionen der 'dynamischen Masse' und des 'STR Impulses' allein schon daraus folgen, dass man annimmt, dass eine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse existiert, welche mit den Erhaltungssätzen für Masse und Impuls kompatibel ist.

Bemerkenswert ist noch, dass alle drei Gesetze von Newton gültig bleiben ! Das erste brauchen wir nicht zu beachten, es ist ja nur ein Spezialfall des zweiten. Das zweite Gesetz lautet in Newtons ursprünglicher Formulierung $F = dp/dt$. Das gilt in der SRT weiterhin, allerdings mit einer etwas 'nachjustierten' Definition des Impulses. Und Newtons drittes Gesetz ('actio = reactio') ist als tiefe Erkenntnis sowieso erhaben über die Spitzfindigkeiten jeder speziellen Theorie.

Setzt man die Gleichung $E = p \cdot c$ für eine Portion an elektromagnetischer Strahlung voraus, kann man aus dem Impulserhaltungssatz (Abschnitte 10 bis 12) oder dem Energieerhaltungssatz (Abschnitt 13) die Äquivalenz von Masse und Energie ableiten und die ganze SRT darauf aufbauen. Dann kann man das Axiom **A1** leicht abschwächen, es genügt zu verlangen, dass die Lichtgeschwindigkeit an *ruhenden Quellen gemessen* in allen Bezugssystemen dieselbe sei.
A1 ist also äquivalent zu **A2 & A3**, wenn diese etwa so lauten:

A2 Die Vakuums-Lichtgeschwindigkeit an einer ruhenden Quelle gemessen ist eine universelle Naturkonstante.

A3 Energie und Impuls von elektromagnetischer Strahlung sind durch die Gleichung $E = p \cdot c$ gekoppelt.